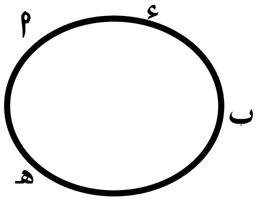
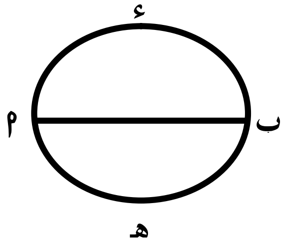
نتائج و مفاهيم هامة على الدائرة



القوس : إذا كانت أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة فإن مجموعة النقط المحصورة

بين أ ، ب تسمى قوساً و يرمز لها بالرمز($\overset{\frown}{\text{أب}}$) و تلاحظ هناك قوسان يعبر عنهما ($\overset{\frown}{\text{أب}}$)

$\boxed{1}$ $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأصغر = $\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$ $\boxed{2}$ $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأكبر = $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$

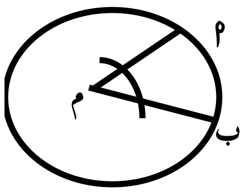


مُلاحظـــات :–

(١) $\overset{\frown}{\text{أب}}$ يعبر عن القوس الأصغر مالم يُذكر غير ذلك

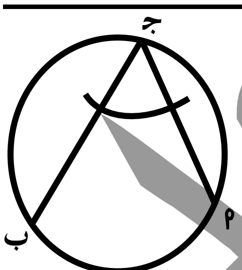
(٢) إذا كان $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة فإن $\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$ = $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$ و يسمى كلاً منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية :– هى زاوية رأسها مركز الدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة



فى الشكل المقابل :∠ أ م ب رأسها مركز الدائرة م و كلاً من ضلعيها أنصاف أقطار

فى الدائرة (أ م = ب م = نق)

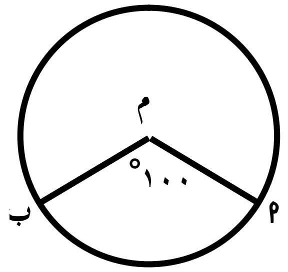


الزاوية المحيطية : – هى زاوية رأسها يقع على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً فى

الدائرة ففى الشكل المقابل الزاوية (∠ أ جـ ب) رأسها يقع على الدائرة وكلا

من ضلعيها أوتاراً فى الدائرة $\overline{\text{أجـ}}$ وتراً ، $\overline{\text{بجـ}}$ وتراً

قياس القوس :– هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

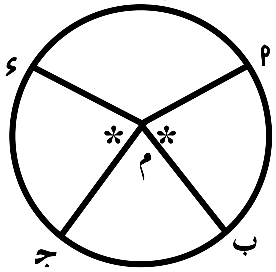


ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) الأصغر = ق (∠ أ م ب) = ١٠٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{أب}}$) الأكبر = ق (∠ أ م ب) المنعكسة = ٣٦٠ – ١٠٠ = ٢٦٠°

نتائج هامة

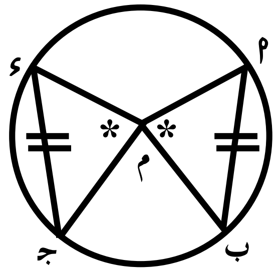
نتيجة (١) : في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المُتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول و العكس صحيح



فمثلاً : في الشكل المقابل

إذا كان : ق(⌒أب) = ق(⌒جـ ء) فإن : طول (⌒أب) = طول (⌒جـ ء)

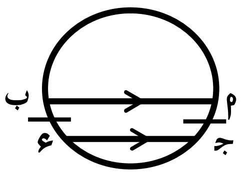
نتيجة (٢) : في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول والعكس صحيح



فمثلاً : في الشكل المقابل

إذا كان : ق(⌒أب) = ق(⌒جـ ء) فإن : أب = جـ ء و العكس صحيح

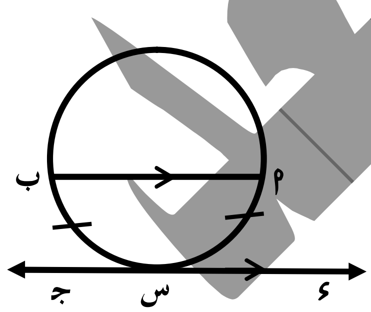
نتيجة (٣) : الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس



فمثلاً : في الشكل المقابل

إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ فإن : ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب ء)

نتيجة (٤) : القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه متساويان في القياس

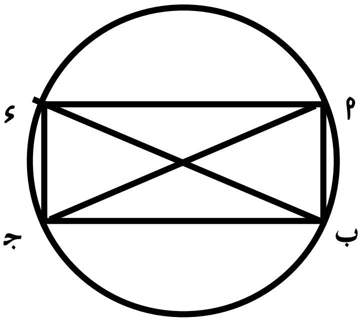


فمثلاً : في الشكل المقابل

إذا كان : $\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{ء جـ}$ يمس الدائرة في س

و كان : $\overline{أب}$ // $\overleftrightarrow{ء جـ}$ فإن : ق(⌒أس) = ق(⌒س ب)

أمثـــــــــلة



(١) في الشكل المقابل : أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فإذا كان :

أ ء = ب جـ أثبت أن : أجـ = ب ء

الحـــــــــل

∵ أ ء = ب جـ

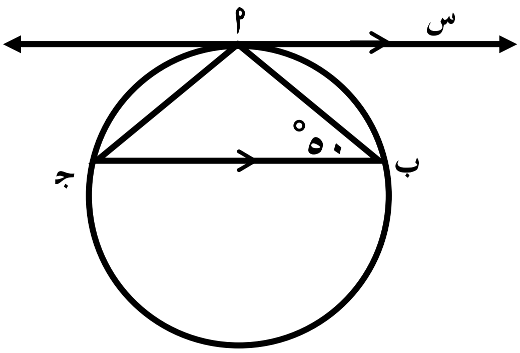
∴ ق(⌒أ ء) = ق(⌒ب جـ)

بإضافة ق(⌒أب) للطرفين

ق(⌒أ ء) + ق(⌒أب) = ق(⌒ب جـ) + ق(⌒أب)

∴ ق(⌒ب ء) = ق(⌒أجـ)

∴ ب ء = أجـ (هـ . ط . ث)



② فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{أس}}$

ق(⌒ب) = ٥٠° أوجد : ق(∠ ب أ جـ)

الحـــــــــــــل

∵ $\overline{\text{أس}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

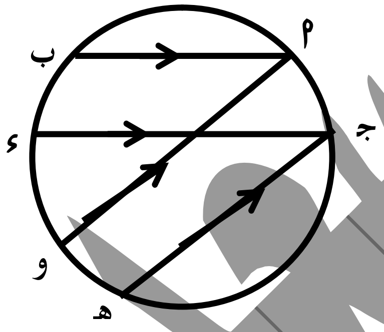
∴ ق(⌒أب) = ق(⌒أجـ)

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (٥٠+٥٠)

= ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°



③ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{أو}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$

أثبت أن : ق(⌒ب ء) = ق(⌒هـ و)

الحـــــــــــــل

∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒ب ء) $\boxed{١}$

∵ $\overline{\text{أو}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$

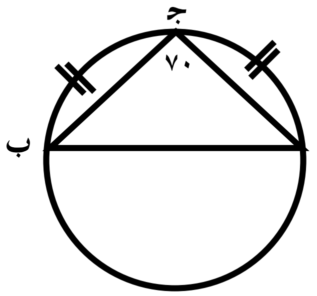
∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒هـ و) $\boxed{٢}$

من $\boxed{١}$ ، $\boxed{٢}$ ⇐

∴ ق(⌒ب ء) = ق(⌒هـ و)

④ فى الشكل المقابل : إذا كان ق(⌢أ ج) = ق(⌢ب ج)

، ق(∠أ ج ب) = ٧٠° ، أوجد ق(∠أ ب ج)



الحـــــــــل

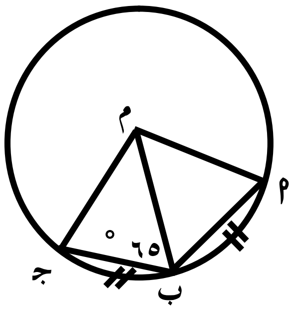
∵ ق(⌢أ ج) = ق(⌢ب ج) ⇐ أ ج = ب ج

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

---

⑤ فى الشكل المقابل : إذا كانت دائرة م فيها ق(⌢أ ب) = ق(⌢ب ج)

ق(∠م ب ج) = ٦٥ ° أوجد ق(⌢أ ب)



الحـــــــــل

فى △ م ب ج : ∵ م ب = م ج = نق

∴ ق(∠م ب ج) = ق(∠م ج ب) = ٦٥°

∴ ق(∠ب م ج) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ق(⌢ب ج) = ق(∠ ب م ج) = ٥٠°

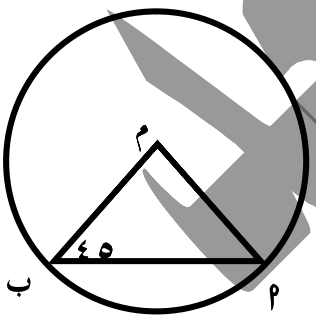
∴ ق(⌢أ ب) = ق(⌢ب ج)

∴ ق(⌢أ ب) = ٥٠°

---

⑥ فى الشكل المقابل : أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م ، م أ = م ب

ق(∠ م ب أ) = ٤٥ ° ، أ م = ٧ سم ، أوجد طول (⌢أ ب)



الحـــــــــل

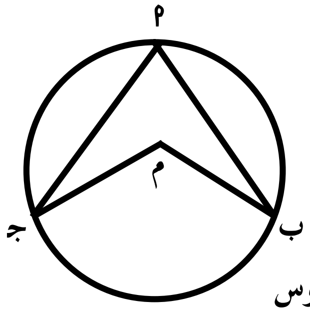
∵ م أ = م ب ⇐ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ م ب أ) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠° ⇐ ق(⌢أ ب) = ٩٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم

العلاقة بين الزاويتين المُحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

نظرية (١ – ١) : قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

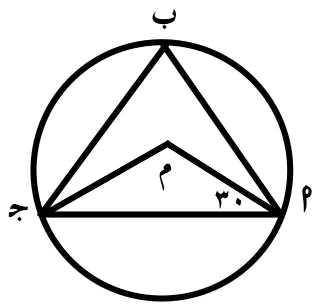


فى الشكل المقابل : ∠ ب أ ج محيطية ، ∠ ب م ج مركزية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب ج}}$

فيكون : ق(∠ ب أ ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ج)

ملاحظة : قياس الزاوية المركزية يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس

أمثـــــــــلة



① فى الشكل المقابل : أوجد ق(∠ ب)

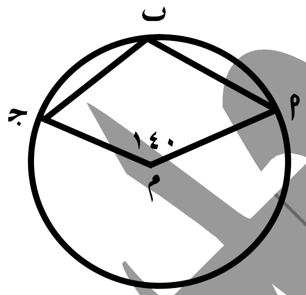
الحــــــــــل

فى △ أ م ج : ∵ م أ = م ج = نق

∴ ق(∠ م أ ج) = ق(∠ م ج أ) = ٣٠°

∴ ق(∠ أ م ج) = ١٨٠ – (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ ب ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ج) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠°

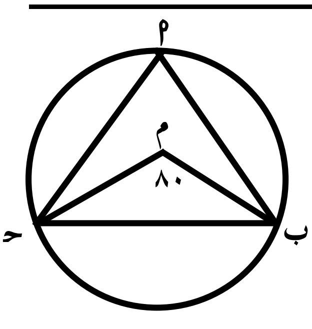


② فى الشكل المقابل : أوجد ق(∠ أ ب ج)

الحــــــــــل

ق(∠ أ م ج) المنعكسة = ٣٦٠ – ١٤٠ = ٢٢٠°

∴ ق(∠ أ ب ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ج) المنعكسة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٢٠ = ١١٠°

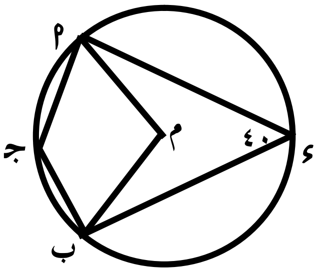


③ فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب = أ ج ، ق(∠ ب م ج) = ٨٠° فأوجد ق(∠ أ ج ب)

الحــــــــــل

∵ ق(∠ ب أ ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ج) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ = ٤٠° ، ∵ أ ب = أ ج

∴ ق(∠ أ ب ج) = ق(∠ أ ج ب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°



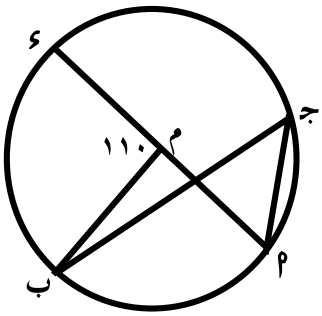
④ في الشكل المقابل : إذا كان ق(∠ ء ب) = ٤٠° أوجد ق(∠ جـ ب)

الحـــــــــــل

∵ ق(∠ م ب) = ٢ ق(∠ ء ب) = ٢ × ٤٠ = ٨٠°

∴ ق(∠ م ب) المنعكسة = ٣٦٠ − ٨٠ = ٢٨٠°

∴ ق(جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(م ب) المنعكسة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٨٠ = ١٤٠°



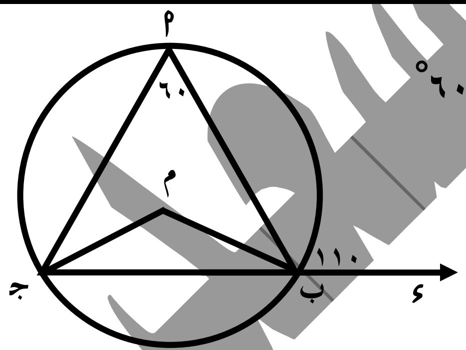
⑤ في الشكل المقابل : إذا كان ق(∠ ء م ب) = ١١٠° أوجد ق(∠ جـ ب)

الحـــــــــــل

∵ ق(∠ م ب) + ق(∠ ء م ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ م ب) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

∴ ق(∠ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٧٠ = ٣٥°



⑥ في الشكل المقابل : ق(∠ ب ء) = ١١٠° ، ق(∠ ب جـ) = ٦٠°

اوجد ق(∠ ب م)

الحـــــــــــل

ق(∠ ب م جـ) = ٢ق(∠) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

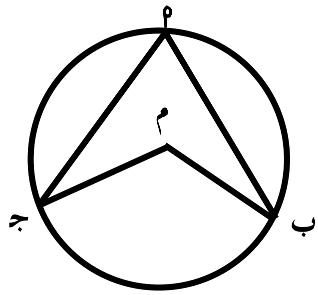
في △ ب م جـ : ∵ ب م = جـ م = نق ⇐ ق(∠ م ب جـ) = ق(∠ م جـ ب) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

∵ ق(∠ ء ب) + ق(∠ ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب جـ) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

∴ ق(∠ ب م) = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠°

نتائج هامة



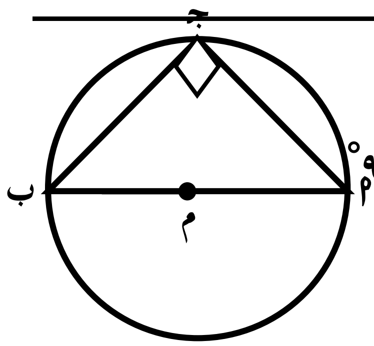
نتيجة ① : قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

فى الشكل المقابل : ∵ ق(∠ ب م ج) = ق(ب⌒ج)

∵ ق(∠أ) = ½ ق(∠ ب م ج)

∴ ق(∠أ) = ½ ق(ب⌒ج)

ملاحظة : قياس القوس يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصورة بين ضلعيه



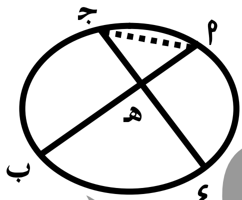
نتيجة ② : الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة

أى أن قياس الزاوية المحيطية المقامة فى نصف دائرة (على القطر) = ٩٠°

فى الشكل المقابل : أب قطر فى الدائرة م ، ج نقطة تقع على محيط الدائرة

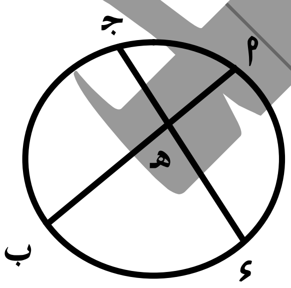
∴ ق(∠أ ج ب) = ٩٠°

تمرين مشهور ① : إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة فإن زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها



ق(∠أهـ ج) = ½ [ق(أ⌒ج) + ق(ب⌒ء)]

تدريـــــب

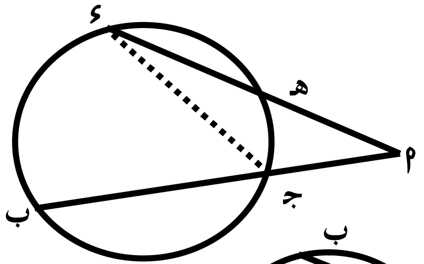


① فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(أ⌒ج) + ق(ب⌒ء) = ١١٠°

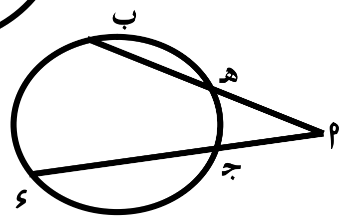
فإن : ق(∠ أ هـ ج) = ... °

تمرين مشهور (٢) : إذا تقاطع وتران فى نقطة خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما تساوى نصف حاصل طرح قياسى القوسين المقابلين لها



ق (∠ أ) = ½ [ق (ء ب) + ق (جـ هـ)]

تدريـــــب : (١) فى الشكل المقابل : إذا كان :

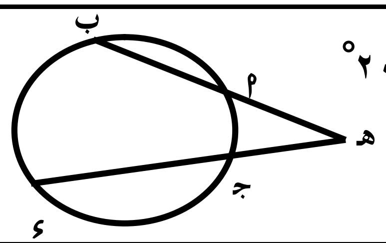


ق (ب ء) − ق (هـ جـ) = ١٠٠°

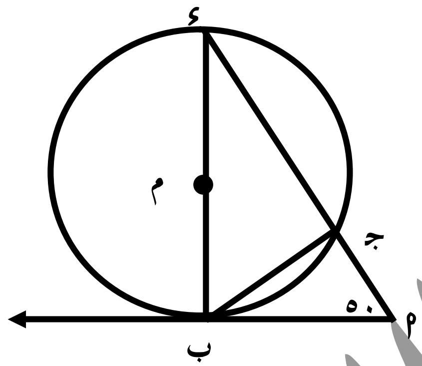
فإن : ق (∠ أ) = ... °

---

(٢) فى الشكل المقابل : إذا كان : ق (ب ء) = ١٠٠° ، ق (أ جـ) = ٢٠°



فإن : ق (∠ هـ) = ... °



أمثـــــلة

(١) فى الشكل المقابل : ء ب قطر فى الدائرة م ، أ ب يمس الدائرة عند ب

أ ء يقطع الدائرة فى جـ ، ء ، ق (∠ جـ أ ب) = ٥٠°

أوجد ق (∠ ء ب جـ)

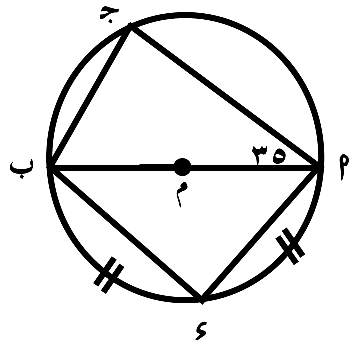
الحـــــــــــل

∵ ء ب قطر ، أ ب مماس ⇐ ق (∠ أ ب ء) = ٩٠°

فى △ أ ب ء : ق (∠ أ ء ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

∵ ء ب قطر ، ∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

فى △ أ ب ء : ق (∠ ء ب جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠°



(٢) فى الشكل المقابل: أ ب قطر فى الدائرة م ، طول أ ء = طول ب ء

أوجد بالبرهان : ق (∠ جـ ب ء)

الحـــــــــــل

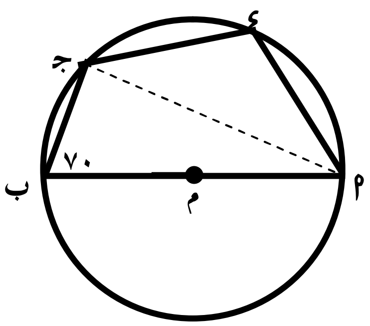
∵ أ ب قطر ⇐ ق (∠ أ ء ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∵ طول $\overset{\frown}{أء}$ = طول $\overset{\frown}{بء}$ ⇐ ق($\overset{\frown}{أء}$) = ق($\overset{\frown}{بء}$) ⇐ أ ء = ب ء

فى △ أ ءب : ق(∠ ءأب) = ق(∠ ءبأ) = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥°

فى △ أجـ ب : ق(∠أب جـ) = ١٨٠ − (٩٠+٣٥) = ٥٥°

∴ ق(∠ جـ ب ء) = ق(∠ أب جـ) + ق(∠ ءبأ) = ٤٥ + ٥٥ = ١٠٠°



③ فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، طول $\overset{\frown}{أء}$ = طول $\overset{\frown}{ءجـ}$

ق(∠ أب جـ) = ٧٠ ° اوجد ق(∠ ء جـ أ) ، ق(∠جـ أب)

الحـــــــــــــل

∵ $\overline{أب}$ قطر ⇐ ق(∠أجـ ب) = ٩٠°

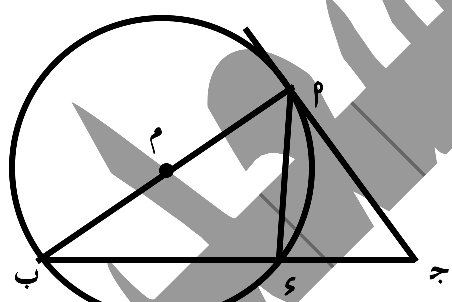
فى △ أب جـ : ∴ ق(∠جـ أب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٧٠) = ١٨٠ − ١٦٠ = ٢٠°

∵ ق(∠أب جـ) = ٧٠ ° ⇐ ق($\overset{\frown}{أء}$) + ق($\overset{\frown}{ءجـ}$) = ١٤٠° ①

∵ طول $\overset{\frown}{أء}$ = طول $\overset{\frown}{ءجـ}$ ⇐ ق($\overset{\frown}{أء}$) = ق($\overset{\frown}{ءجـ}$) ②

من ① ، ② ⇐ ق($\overset{\frown}{أء}$) = ق($\overset{\frown}{ءجـ}$)

∴ ق(∠ أجـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أء}$) = $\frac{١}{٢}$ × ٧٠ = ٣٥°



④ فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أجـ}$ تمس الدائرة عند أ

أجـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم أوجد طول ب جـ ، أ ء

الحـــــــــــــل

$\overline{أجـ}$ مماس ، $\overline{أب}$ قطر ⇐ ق(∠جـ أب) = ٩٠°

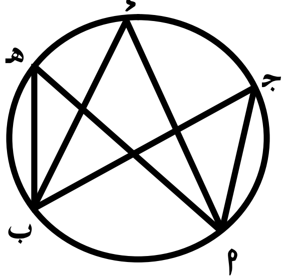
∴ (ب جـ)^2 = (جـ أ)^2 + (أب)^2 = (٩)^2 + (١٢)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥ ⇐ ب جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥سم

∴ $\overline{أب}$ قطر ⇐ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∴ أ ء × ب جـ = أب × أجـ 	أ ء × ١٥ = ٩ × ١٢ ⇐ أ ء = ٧,٢ سم

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية (١ – ٢) : الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

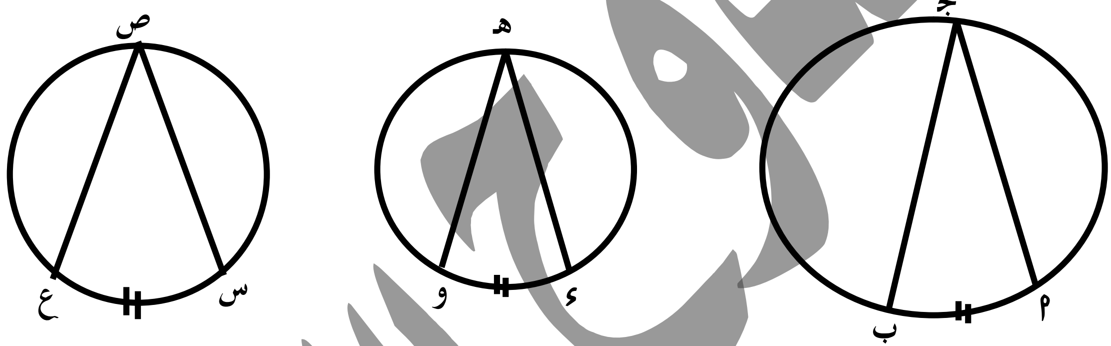


فى الشكل المقابل :

ق(∠جـ) = ½ ق(⌒أ ب) ، ق(∠ ء) = ½ ق(⌒أ ب) ، ق(∠هـ) = ½ ق(⌒أ ب)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ ء) = ق(∠هـ)

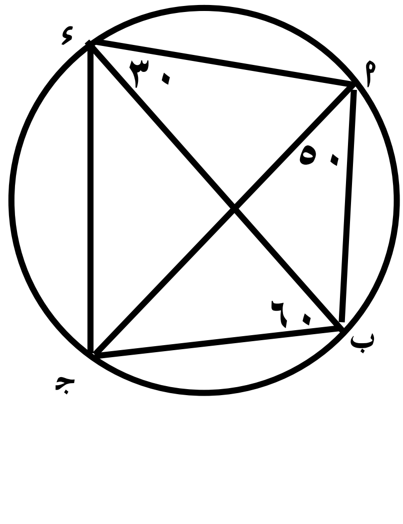
نتيجة : فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس تكون متساوية فى القياس



∵ ق(⌒أ ب) = ق(⌒ء و) = ق(⌒س ع)

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ ء هـ و) = ق(∠س ص ع)

عكس النتيجة : فى الدائرة الوحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس تحصر بين ضلعيها أقواساً متساوية فى القياس

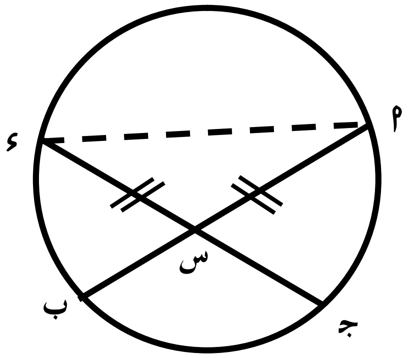


(١) ق(∠أ جـ ب) = ... °		**(٢)** ق(∠ ء أ جـ) = ... °

(٣) ق(∠ب ء جـ) = ... °		**(٤)** ق(∠أ ب ء) = ... °

(٥) ق(∠أ جـ ء) = ... °

أمثـــــــــلة



① في الشكل المقابل : إذا كان أس = س ء   أثبت أن : أب = ج ء

الحـــــــــــــــــل

∵ أس = س ء

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ء)

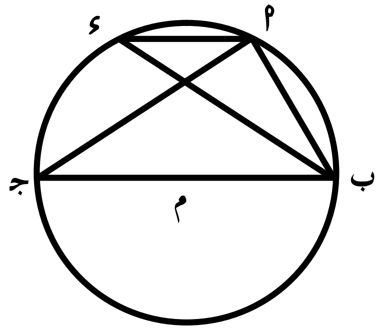
∴ ق(⌒ أ ج) = ق(⌒ ب ء)

بإضافة (⌒ ج ب) للطرفين

∴ ق(⌒ أ ج) + ق(⌒ ج ب) = ق(⌒ ب ء) + ق(⌒ ج ب)

∴ ق(⌒ أ ب) = ق(⌒ ج ء)

∴ أب = ج ء



② في الشكل المقابل : إذا كان ق(∠ ب أ ء) = ١٢٠°

أوجد ق(∠ ء ب ج)

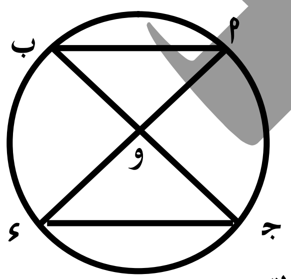
الحـــــــــــــــــل

∵ $\overline{\text{ب ج}}$ قطر ⇐ ق(∠ ب أ ج) = ٩٠°

∵ ق(∠ ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ج أ ء) = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠°

∴ ق(∠ ء ب ج) = ق(∠ ج أ ء) = ٣٠°   مُحيطيتان مشتركتان في القوس ⌒ ج ء



③ في الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب ج}}$ = {و} ، أو = و ب   أثبت أن : وج = و ء

الحـــــــــــــــــل

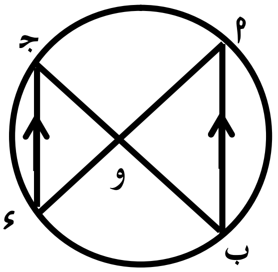
في △ أ ب و : ∵ أو = وب ⇐ ق(∠ أ) = ق(∠ ب)

∵ ق(∠ أ) = ق(∠ ج) ، ق(∠ ب) = ق(∠ ء)   محيطيتان مشتركتان في القوس

∴ ق(∠ ج) = ق(∠ ء)   ⇐   وج = و ء

④ فى الشكل المقابل : أب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة ، أ ء ∩ جـ ب = { و }

أثبت أن : أو = وب



الحـــــــــــــــــــل

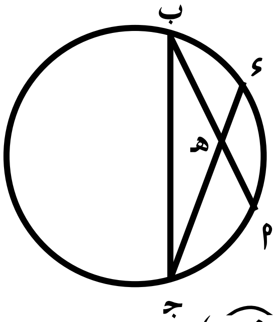
∵ أب // جـ ء　　⇐　　ق(⌒ب ء) = ق(⌒أ جـ)

∵ ق(∠أ) = ½ ق(⌒ب ء)　　،　　∵ ق(∠ب) = ½ ق(⌒أ جـ)

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب)　　⇐　　أو = وب

---

⑤ فى الشكل المقابل : أب = ء جـ أثبت أن : ق(∠ب) = ق(∠جـ)



الحـــــــــــــــــــل

∵ أب = ء جـ　　⇐　　ق(⌒أب) = ق(⌒ء جـ)

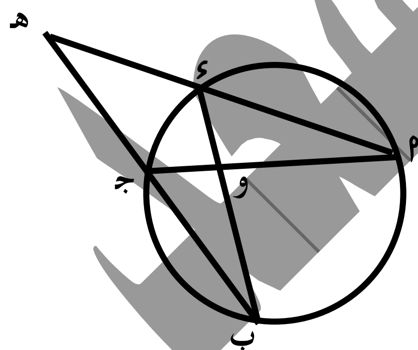
بطرح ق(⌒أ ء) من الطرفين　　⇐　　ق(⌒أب) − ق(⌒أ ء) = ق(⌒ء جـ) − ق(⌒أ ء)

∴ ق(⌒ب ء) = ق(⌒أ جـ)　　⇐　　ق(∠ب) = ق(∠جـ)

---

⑥ فى الشكل المقابل : ق(∠ ء ب جـ) = ٢٥° ، ق(∠هـ) = ٣٦°

أوجد　$\boxed{١}$ ق(∠ ء أ جـ)　　$\boxed{٢}$ ق(∠أ و ب)



الحـــــــــــــــــــل

∵ ق(∠ ء أ جـ) = ق(∠ ء ب جـ) = ٢٥°　　مُحيطيتان مشتركتان فى القوس

∵ ق(∠ ء أ جـ) = ٢٥°　　⇐ ∴ ق(⌒ء جـ) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°

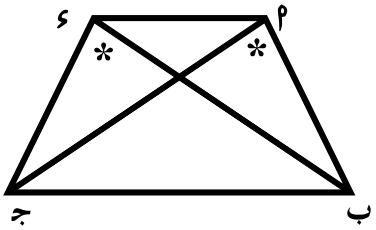
∵ ق(∠هـ) = ½ [ق(⌒أب) − ق(⌒ء جـ)] ⇐ ٣٦ = ½ [ق(⌒أب) − ٥٠] ⇐ ق(⌒أب) = ١٢٢°

فى Δ أ ء و : ق(∠أ و ء) = ١٨٠ − (٢٥ + ٦١) = ٩٤°

∴ ق(∠أ و ب) = ١٨٠ − ٩٤ = ٨٦°

الزوايا المرسومة على قطعة مستقيمة واحدة

عكس نظرية (١–٢) : إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها



فى الشكل المقابل :

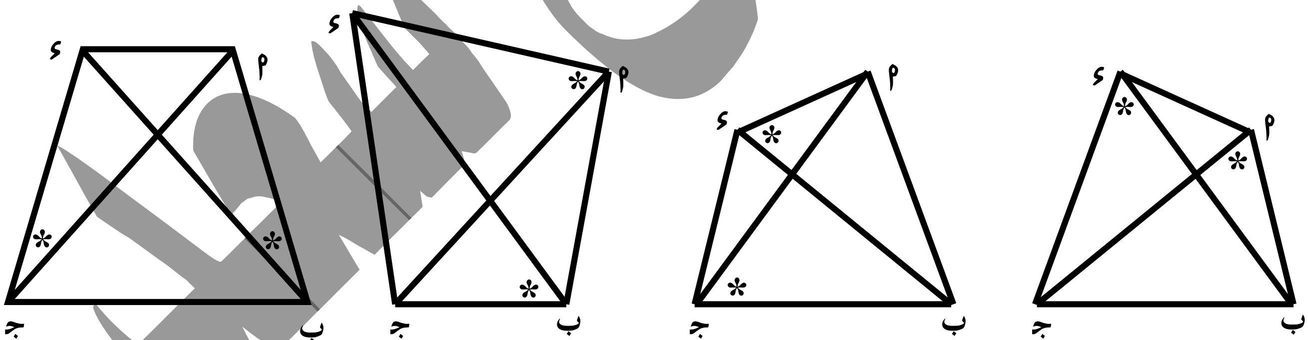
إذا كان ق(∠ب ٱ ج) = ق(∠ب ء ج)

[المرسومتان على القاعدة ب ج وفى جهة واحدة منها]

فإن النقط ٱ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة تكون ب ج وتراً فيها أى أن النقط ٱ ، ب ، ج ، ء تقع على محيط دائرة واحدة وفى هذه الحالة يسمى الشكل الرباعى ٱ ب ج ء (رباعى دائرى)

تعريف الشكل الرباعى الدائرى

هو شكل رباعى تقع رؤوسه الاربعة على محيط دائرة واحدة أو شكل رباعى يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الاربعة

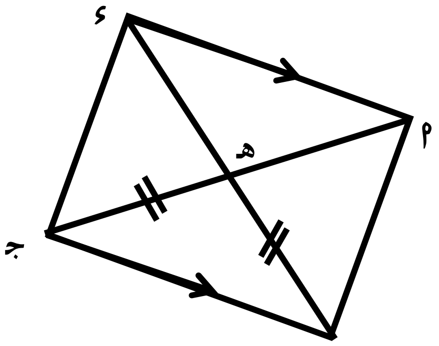


ملاحظات

① المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

② متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية

أمثـــــــــلة



① فى الشكل المقابل : إذا كان ﻫ ء // ب ج ، ﻫ ب = ﻫ ج

إثبت أن الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى

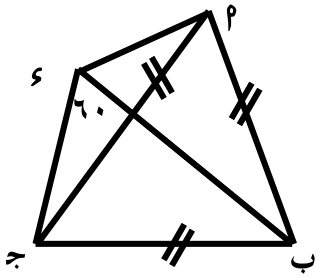
الحـــــــــل

فى △ ﻫ ب ج : ∵ ب ﻫ = ﻫ ج ⟸ ق(∠ﻫ ب ج) = ق(∠ﻫ ج ب) ①

∵ ﻫ ء // ب ج ⟸ ق(∠ ء ﻫ ج) = ق(∠ﻫ ج ب) ②

من ① ، ② ق(∠ ءب ج) = ق(∠ ء ﻫ ج) وهما على قاعدة واحدة (ء ج) و فى جهة واحدة منها

∴ الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى



② فى الشكل المقابل : ﻫ ب ج مثلث متساوى الأضلاع ، ق(∠ب ء ج) = ٦٠°

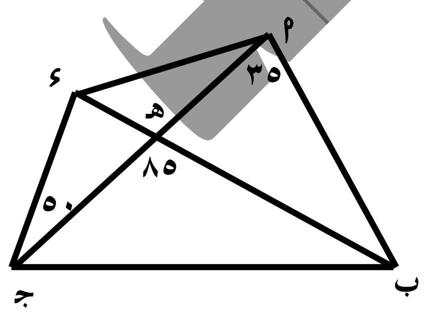
إثبت أن الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى

الحـــــــــل

∵ △ ﻫ ب ج متساوى الأضلاع ⟸ ق(∠ب ﻫ ج) = ٦٠°

∴ ق(∠ب ﻫ ج) = ق(∠ب ء ج) = ٦٠° وهما على قاعدة واحدة (ب ج) و فى جهة واحدة منها

∴ الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى



③ فى الشكل المقابل : إثبت أن الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى

الحـــــــــل

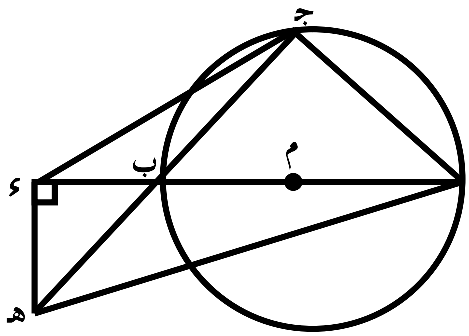
∵ ∠ ب ﻫ ج خارجة عن △ ء ﻫ ج

∴ ق(∠ ب ﻫ ج) = ق(∠ ب ء ج) + ق(∠ ﻫ ج ء) ⟸ ق(∠ب ء ج) = ٨٥ − ٥٠ = ٣٥°

∴ ق∠ب ﻫ ج = ق∠ب ء ج = ٣٥° زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ب ج و فى جهة واحدة منها

∴ ق(∠ب ﻫ ج) = ق(∠ب ء ج) = ٣٥° ⟸ الشكل ﻫ ب ج ء رباعى دائرى

٤ في الشكل المقابل : $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{ءهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$



إثبت أن الشكل أجـ ءهـ رباعي دائري

الحـــــــــل

$\because$ $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م $\Leftarrow$ ق($\angle$ أجـ هـ) = ٩٠°

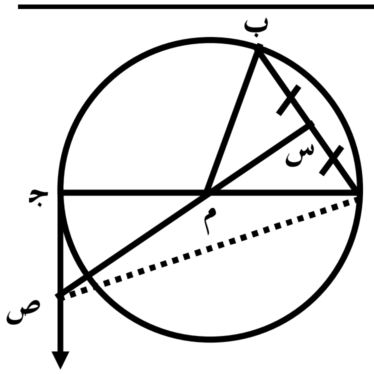
$\because$ $\overline{\text{ءهـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ $\Leftarrow$ ق($\angle$ أ ء هـ) = ٩٠°

$\therefore$ ق($\angle$ أجـ هـ) = ق($\angle$ أ ء هـ) = ٩٠° وهما على قاعدة واحدة و في جهة واحدة منها

$\therefore$ الشكل أجـ ءهـ رباعي دائري

---

٥ في الشكل المقابل : $\overline{\text{أجـ}}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ص}}$ مماس للدائرة عند جـ



س منتصف $\overline{\text{أب}}$ إثبت أن :

$\boxed{1}$ الشكل أس جـ ص رباعي دائري $\boxed{2}$ ق($\angle$ ب م جـ) = ٢ ق($\angle$ م ص جـ)

الحـــــــــل

في $\triangle$ أم ب : م أ = م ب ، س منتصف $\overline{\text{أب}}$ $\Leftarrow$ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أب}}$ $\Leftarrow$ ق($\angle$ أس م) = ٩٠°

$\because$ $\overline{\text{أجـ}}$ قطر ، $\overline{\text{جـ ص}}$ مماس $\Leftarrow$ ق($\angle$ أجـ ص) = ٩٠°

$\therefore$ ق($\angle$ أس ص) = ق($\angle$ أجـ ص) = ٩٠° وهما على قاعدة واحدة و في جهة واحدة منها

$\therefore$ الشكل أس جـ ص رباعي دائري

في $\triangle$ أم ب : م أ = م ب = نق $\Leftarrow$ ق($\angle$ أ) = ق($\angle$ ب)

$\because$ ق($\angle$ ب م جـ) = ق($\angle$ أ) + ق($\angle$ ب) = ق($\angle$ أ) + ق($\angle$ أ) = ٢ ق($\angle$ أ)

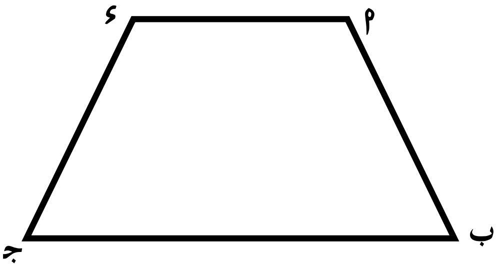
$\because$ الشكل أس جـ ص رباعي دائري $\Leftarrow$ ق($\angle$ أ) = ق($\angle$ م ص جـ)

مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{\text{س جـ}}$ و في جهة واحدة منها

$\therefore$ ق($\angle$ ب م جـ) = ٢ ق($\angle$ م ص جـ)

خواص الشكل الرباعى الدائرى

نظرية (١ – ٣) : إذا كان الشكل الرباعى دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهما = ١٨٠°)

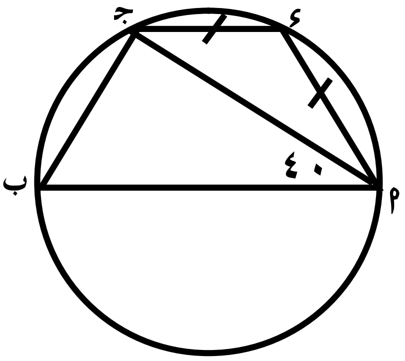


إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى فإن :

① ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

② ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

أمثـــــــــــــلة



① فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء رباعى دائرى ، $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة ،

أ ء = ء جـ ، ق(∠جـ أ ب) = ٤٠°

اوجد : ق(∠ ء) ، ق(∠ب جـ ء)

الحـــــــــــــل

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر ⇐ ق(أ جـ ب) = ٩٠°

فى △ أ ب جـ : ق(∠ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∵ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى ⇐ ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

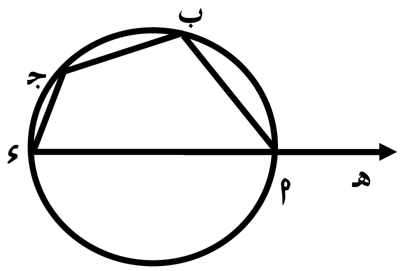
∴ ق(∠ ء) = ١٨٠ – ٥٠ = ١٣٠°

فى △ أ جـ ء : ∵ أ ء = ء جـ

∴ ق(∠أ جـ ء) = ق(∠ جـ أ ء) = $\frac{١٨٠ - ١٣٠}{٢}$ = ٢٥°

∴ ق(∠ب جـ ء) = ق(∠ب جـ أ) + ق(∠أ جـ ء) = ٩٠ + ٢٥ = ١١٥°

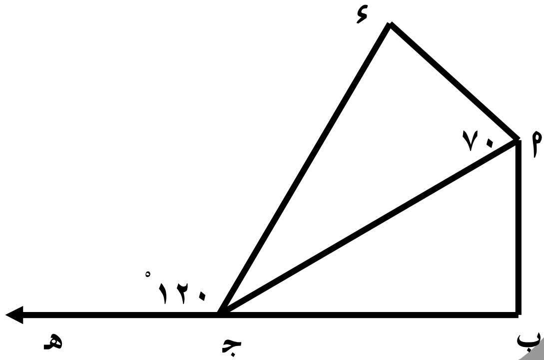
نتيجة (١) : قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة



فى الشكل المقابل : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ ب جـ ء)

أمثلة



(١) فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب جـ ء رباعياً دائرياً

ق(∠ ء جـ هـ) = ١٢٠° ، ق(∠ جـ أ ء) = ٧٠°

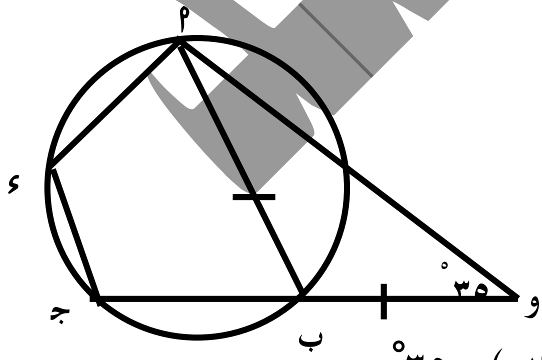
احسب : ق(∠ ب أ جـ)

الحل

∵ ∠ ء جـ هـ خارجة عن الشكل أ ب جـ ء الرباعى الدائرى

∴ ق(∠ ء جـ هـ) = ق(∠ ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٢٠ − ٧٠ = ٥٠°



(٢) فى الشكل المقابل : إذا كان ب و = أ ب ، ق(∠ و) = ٣٥°

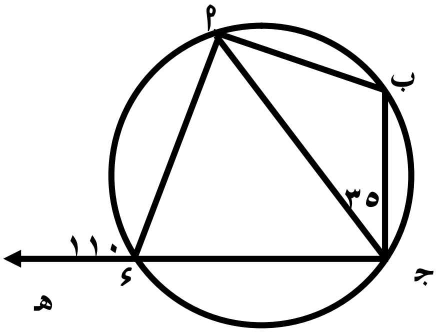
أوجد : ق(∠ أ ء جـ)

الحل

فى △ أ ء ب : ∵ ب و = أ ب ⇐ ق(∠ و) = ق(∠ ء أ ب) = ٣٥°

∴ ق(∠ أ ب و) = ١٨٠ − (٣٥ + ٣٥) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

∵ ∠ أ ب و خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى ⇐ ق(∠ أ ب و) = ق(∠ أ ء جـ) = ١١٠°



③ **في الشكل المقابل : أب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة**

ق(∠أ ءهـ) = ١١٠° ، ق(∠أجـ ب) = ٣٥°

أثبت أن △ أب جـ متساوى الساقين

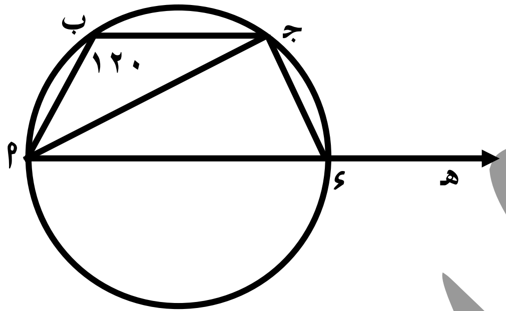
الحـــــــــــــــــل

∵ ∠ أ ءهـ زاوية خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أب جـ ء

∴ ق(∠ب) = ق(∠أ ءهـ) = ١١٠°

في △ أب جـ : ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٣٥) = ١٨٠ − ١٤٥ = ٣٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠أجـ ب) = ٣٥° ⇐ ب أ = ب جـ ⇐ م أب جـ متساوى الساقين



④ **في الشكل المقابل : أب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة م**

ق(∠ب) = ١٢٠° ، $\overline{\text{أ ء}}$ قطر

$\boxed{1}$ أوجد : ق(∠ جـ ءهـ) ، ق(∠جـ أ ء)

$\boxed{2}$ إذا كان : ء جـ = ٧ سم أوجد طول ($\overparen{\text{أ ء}}$)

الحـــــــــــــــــل

∵ أب جـ ء شكل رباعى ⇐ ق(∠جـ ءهـ) = ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠جـ ءهـ) + ق(∠جـ ء أ) = ١٨٠° ⇐ ق(∠جـ ء أ) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ قطر ⇐ ق(∠أجـ ء) = ٩٠°

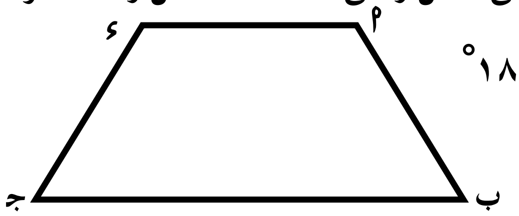
∴ ق(∠جـ أ ء) = ١٨٠ − (٩٠+٦٠) = ٣٠°

في △ أ ء جـ : ∵ ق(∠أجـ ء) = ٩٠° ، ∴ ق(∠جـ أ ء) = ٣٠°

∴ جـ ء = $\frac{1}{2}$ أ ء ⇐ أ ء = ٢ جـ ء = ٢ × ٧ = ١٤ سم

∴ طول ($\overparen{\text{أ ء}}$) = π نق = $\frac{22}{7}$ × ٧ = ٢٢ سم

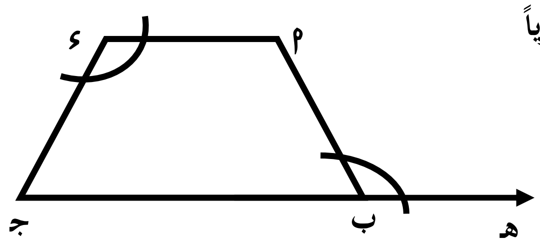
عكس نظرية (١ – ٣) : إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان هذا الشكل رباعياً دائرياً



فى الشكل المقابل : إذا كان ق(∠ م) + ق(∠ ج) = ١٨٠°

فإن الشكل م ب ج ء رباعى دائرى

عكس نتيجة ① : إذا وجدت زاوية خارجة ن عند رأس من رؤوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعياً دائرياً



فى الشكل المقابل : إذا كان ق(∠ م ب هـ) = ق(∠ ء)

فإن الشكل م ب ج ء رباعى دائرى

مُلخص الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

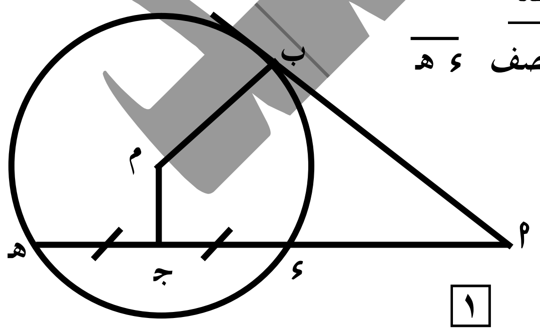
① إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه الأربعة

② إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع (القاعدة)

③ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

④ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

أمثـــــــــــلة



① فى الشكل المقابل : إذا كان $\overline{\text{م ب}}$ مماس للدائرة م ، ج منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$

إثبت أن الشكل م ب ج م رباعى دائرى

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{م ب}}$ مماس للدائرة م ⟸ ق(∠ م ب م) = ٩٠° $\boxed{١}$

∵ ج منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ ⟸ ق(∠ م ج م) = ٩٠° $\boxed{٢}$

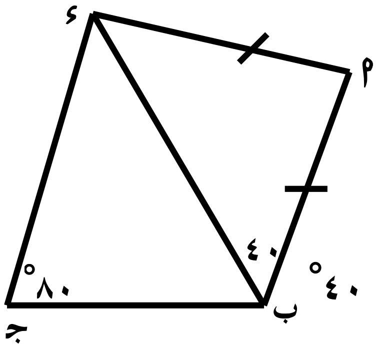
من ① ، ② ⟸ ق(∠ م ب م) + ق(∠ م ج م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل م ب ج م رباعى دائرى

② في الشكل المقابل : أب = أ ء ، ق(∠أب ء) = ٤٠°

ق(∠ج) = ٨٠°

إثبت أن الشكل أ ب ج ء رباعي دائرى



الحـــــــــــــــــل

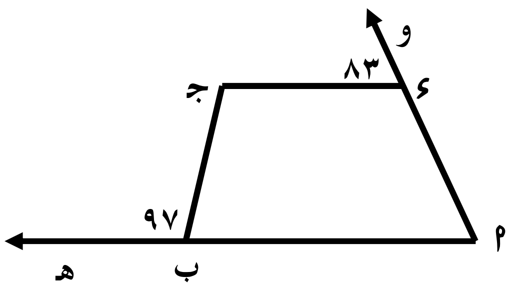
في △ أب ء : ∵ أب = أ ء ⇐ ق(∠أب ء) = ق(∠أ ء ب) = ٤٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠°

∵ ق(∠أ) + ق(∠ج) = ١٠٠ + ٨٠ = ١٨٠° ⇐ الشكل أ ب ج ء رباعي دائرى

---

③ في الشكل المقابل : أثبت أن الشكل أب ج ء رباعي دائرى



الحـــــــــــــــــل

∵ ق(∠أ ء ج) = ١٨٠ − ٨٣ = ٩٧°

∵ ق(∠ج بهـ) = ق(∠أ ء ج) حيث ∠ ج بهـ خارجة عن الشكل أ ب ج ء

∴ الشكل أ ب ج ء رباعي دائرى

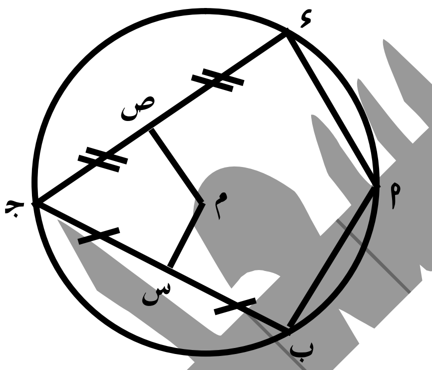
---

④ في الشكل المقابل : أب ج ء رباعي مرسوم داخل دائرة م

س منتصف $\overline{\text{ب ج}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ج ء}}$

إثبت أن : ① الشكل م س ج ص رباعي دائرى

② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)



الحـــــــــــــــــل

∵ س منتصف $\overline{\text{ب ج}}$ ⇐ ق(∠م س ج) = ٩٠° ، ∵ ص منتصف $\overline{\text{ء ج}}$ ⇐ ق(∠م ص ج) = ٩٠°

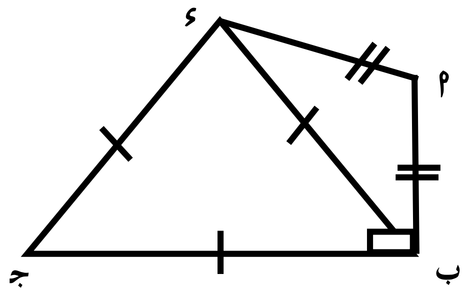
∴ ق(∠م س ج) + ق(∠م ص ج) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل م س ج ص رباعي دائرى (وهو المطلوب أولاً)

∴ (∠س م ص) + ق(∠ ج) = ١٨٠° ①

∵ الشكل أب ج ء رباعي دائرى ⇐ ق(∠ب أ ء) + ق(∠ج) = ١٨٠° ②

من ① ، ② ⇐ ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء) (وهو المطلوب ثانياً)



⑤ في الشكل المقابل : م ب جـ ء رباعي فيه : م ب ⊥ ب جـ

، م ب = م ء ، ب جـ = جـ ء = ء ب

أثبت أن : الشكل م ب جـ ء رباعي دائري

الحـــــــــــــــــل

في △ ء ب جـ : ∵ ب جـ = جـ ء = ء ب

في △ م ب ء : ∵ م ب = م ء

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ب ء جـ) = °٦٠

∴ ق(∠م ب ء) = ق(∠م ء ب) = °٣٠

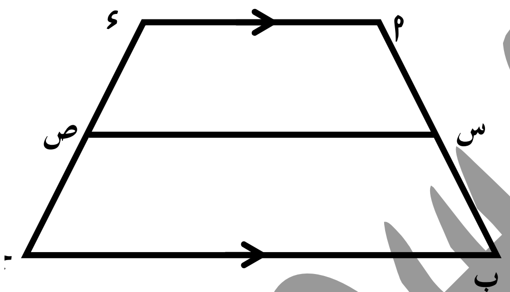
∵ م ب ⊥ ب جـ ⇐ ق(∠م ب جـ) = °٩٠

∴ ق(∠م) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = °١٢٠

∴ ق(∠م ب ء) = ٩٠ − ٦٠ = °٣٠

∴ ق(∠م) + ق(∠جـ) = ١٢٠+٦٠=°١٨٠

∴ الشكل م ب جـ ء رباعي دائري



⑥ في الشكل المقابل : م ء // ب جـ ، م س ص ء رباعي دائري

أثبت أن : س ب جـ ص رباعي دائري

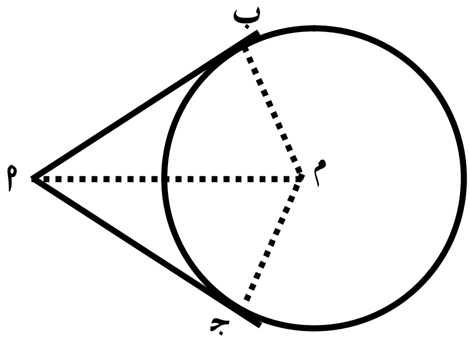
الحـــــــــــــــــل

∵ م ء // ب جـ ، م ب قاطع لهما ⇐ ق(∠م) + ق(∠ب) = °١٨٠ ①

∵ م س ص ء رباعي دائري ⇐ ق(∠م) + ق(∠س ص ء) = °١٨٠ ②

من ① ، ② ⇐ ق(∠س ص ء) = ق(∠ب) ⇐ س ب جـ ص رباعي دائري

نظرية (٣ – ١) : القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول



∵ أب مماس للدائرة ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

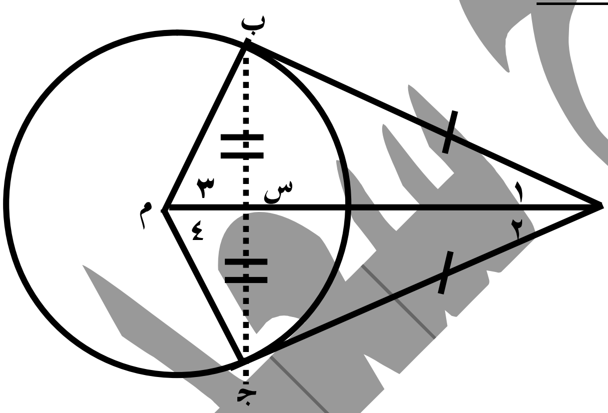
∵ أجـ مماس للدائرة ⇐ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°

فى ∆ ∆ أ ب م ، أ جـ م

فيهمـــا:
- $\boxed{١}$ ق(∠أ ب م) = ق(∠أ جـ م) = ٩٠°
- $\boxed{٢}$ أم ضلع مشترك
- $\boxed{٣}$ م ب = م جـ = نق

∴ ∆ أ ب م ≡ ∆ أ جـ م ⇐ أب = أجـ

نتائج نظرية (٣–١)



إذا كان أب ، أجـ قطعتان مماستان فإن

① ق(∠١) = ق(∠٢) (أم ينصف ∠ ب أ جـ)

② ق(∠٣) = ق(∠٤) (أم ينصف ∠ ب م جـ)

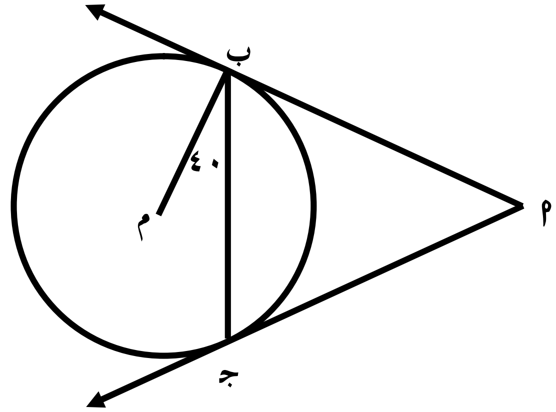
③ أم محور ب جـ (س منتصف ب جـ) ⇐ ب س = جـ س

④ أم ⊥ ب جـ ⇐ ق(∠ب س م) = ق(∠جـ س م) = ٩٠°

⑤ قوس الدائرة المحصور بين القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة قوس أصغر فى الدائرة

أمثـــــــلة

① في الشكل المقابل : $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان



ق(∠م ب جـ) = ٤٠° أوجد ق(∠أ)

الحـــــــــــــــــل

∵ $\overline{أب}$ مماس ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

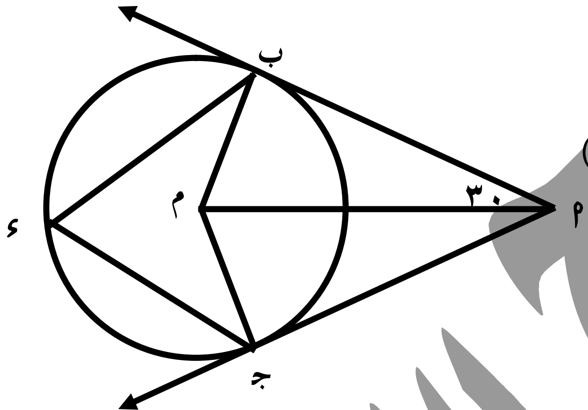
∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠ − ٤٠ = ٥٠°

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان ⇐ أب = أجـ ⇐ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٥٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

---

② في الشكل المقابل : $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان



ق(∠ب أ م) = ٣٠° أوجد ق(∠جـ أ م) ، ق(∠ ء)

الحـــــــــــــــــل

∵ $\overline{أب}$ مماس ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

في △ أ ب م : ق(∠أ م ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ق(∠أ م ب) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

∵ ق(∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ أ م) = ق(∠ب أ م) = ٣٠°

---

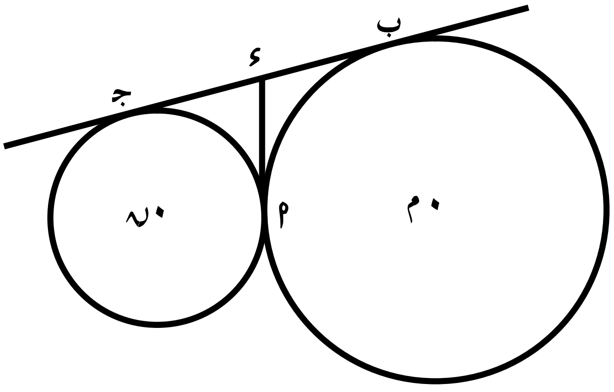
③ في الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في أ

$\overline{ب جـ}$ مماس للدائرتين عند ب ،جـ

$\overline{أ ء}$ مماس مشترك لهما عند أ

إثبت أن : ء منتصف $\overline{ب جـ}$

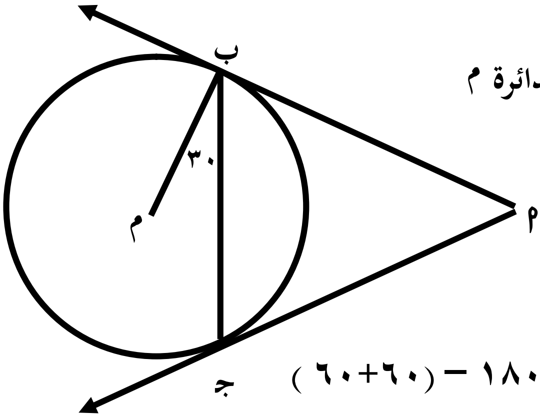


الحـــــــــــــــــل

∵ ءب ، ءأ قطعتان مماستان للدائرة م ⇐ ءب = ءأ ①

∵ ءج ، ءأ قطعتان مماستان للدائرة ن ⇐ ءج = ءأ ②

من ① ، ② ⇐ ب ء = ء ج ⇐ ء منتصف ب ج



④ فى الشكل المقابل : إذا كان أب ، أج قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠م ب ج) = ٣٠° ، إثبت أن △ أ ب ج متساوى الاضلاع

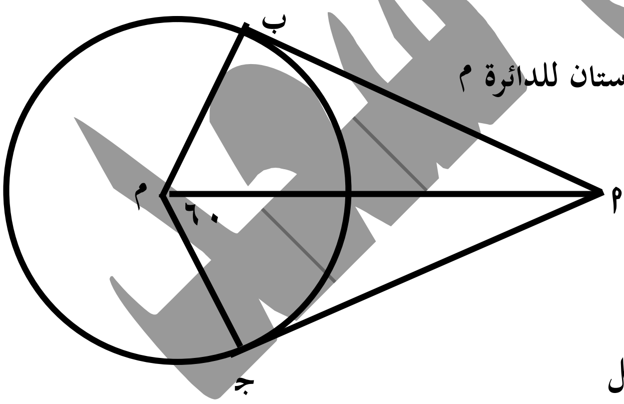
الحـــــــل

∵ أب مماس ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠° ∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٦٠+٦٠)

∴ ق(∠أ ب ج) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠° = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

∵ أب ، أج قطعتان مماستان ⇐ أب = أج فى △ أ ب ج : ∵ ق(∠أ) = ق(∠أ ب ج) = ق(∠أ ج ب)

∴ ق(∠أ ج ب) = ق(∠أ ب ج) = ٦٠° ∴ △ أ ب ج متساوى الأضلاع



⑤ فى الشكل المقابل : إذا كان أب ، أج قطعتان مماستان للدائرة م

، ق(∠أ م ج) = ٦٠° $\boxed{١}$ أوجد ق(∠أ)

$\boxed{٢}$ أثبت أن : أم = ٢نق

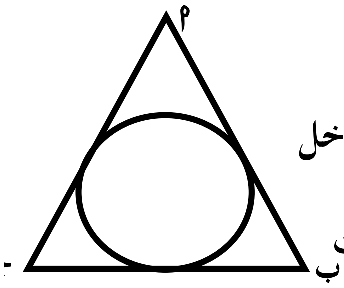
الحـــــــل

∵ أج مماس ⇐ ق(∠أ ج م) = ٩٠° ⇐ ق(∠ج أ م) = ١٨٠ − (٩٠ + ٦٠) = ٣٠°

∴ ق(∠أ) = ٢ق(∠ج أ م) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

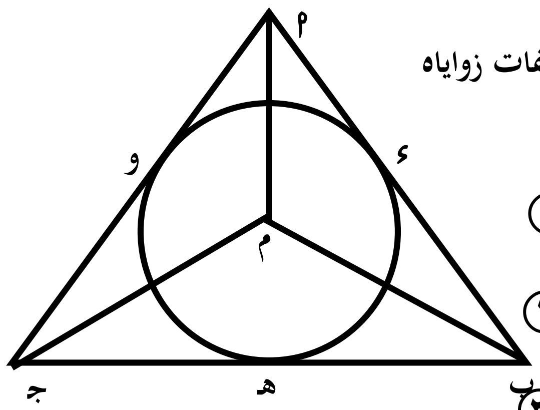
فى △ أ ج م : ∵ ق(∠ج أ م) = ٣٠° ⇐ ج م = $\frac{١}{٢}$ أ م ⇐ أ م = ٢ ج م = ٢نق

الدائرة الداخلة للمثلث



الدائرة الداخلة لمثلث هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

إذا كانت الدائرة م تمس أضلاع المثلث أ ب جـ من الداخل فإنها تسمى دائرة داخلة للمثلث



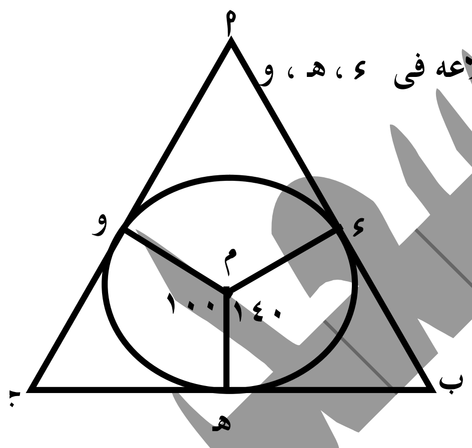
تمرين مشهور : مركز الدائرة الداخلة لاى مثلث هو نقطة تقاطع مُنصفات زواياه

∵ أ ء ، أ و قطعتان مماستان ⇐ أ م ينصف ∠ ب أ جـ (١)

∵ ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان ⇐ ب م ينصف ∠ أ ب جـ (٢)

∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ⇐ جـ م ينصف ∠ أ جـ ب (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ⇐ م هى نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب جـ الداخلة



(١) فى الشكل المُقابل :إذا كانت الدائرة م الداخلة للمثلث أ ب جـ تمس أضلاعه فى ء ، هـ ، و

أوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ

الحـــــــــــــل

∵ ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان ⇐ ق(∠م ء ب) = ق(∠م هـ ب) = ٩٠°

∵ الشكل ء ب هـ م رباعى دائرى ⇐ ق(∠ب) + ق(∠ ء م هـ) = ١٨٠°

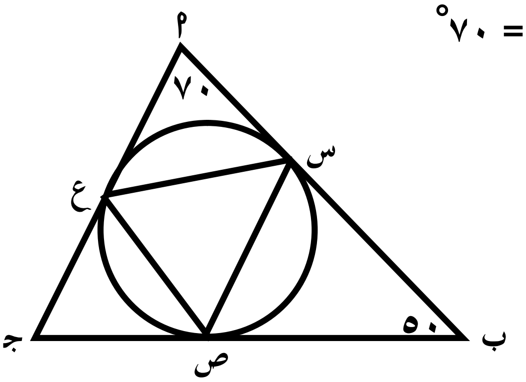
∴ ق(∠ب) = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ⇐ ق(∠جـ هـ م) = ق(∠جـ و م) = ٩٠°

∵ الشكل م هـ جـ و رباعى دائرى ⇐ ق(∠جـ) + ق(∠م هـ جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

فى Δ أ ب جـ : ق(∠أ) = ١٨٠ − (٤٠+٨٠) = ٦٠°



(٢) فى الشكل المقابل : دائرة م مرسومة داخل Δ أ ب جـ ، ق(∠أ) = ٧٠°

ق(∠ب) = ٥٠° ، أوجد ق(∠ص س ع)

الحـــــــــــــــل

∵ $\overline{\text{ب س}}$ ، $\overline{\text{ب ص}}$ قطعتان مماستان ⇐ ب س = ب ص

∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠ب ص س) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥°

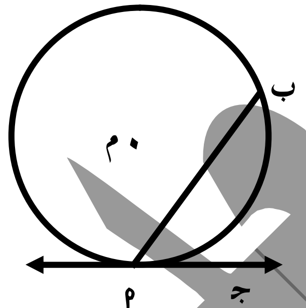
∵ $\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{أ ع}}$ قطعتان مماستان ⇐ أ س = أ ع

∴ ق(∠أ س ع) = ق(∠أ ع س) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(∠ص س ع) = ١٨٠ − (٦٥ + ٥٥) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

الزاوية المماسية

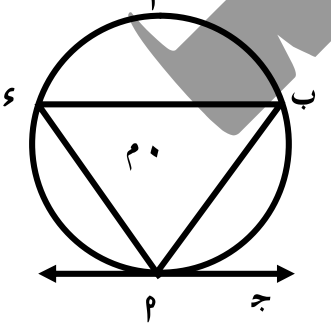
هى الزاوية المكونة من أتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والأخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس



إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتراً فإن الزاوية ب أ جـ تسمى زاوية مماسية

ملاحظات هامة

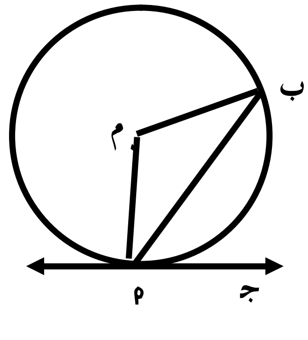
(١) الزاوية المماسية حالة خاصة من حالات الزاوية المحيطية



(٢) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

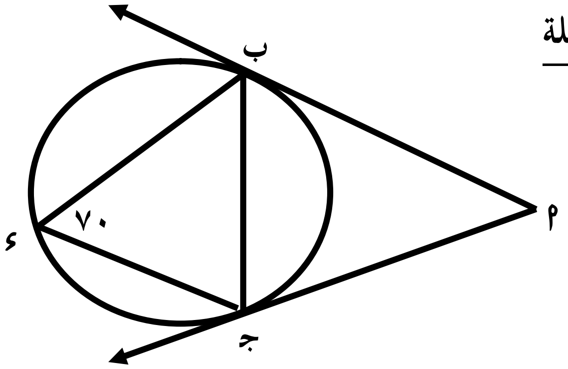
(٣) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ء أ)



(٤) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة

معها فى القوس ق(∠ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب م أ)



أمثـــــــــــلة

① فى الشكل المقابل : م‾ب ، م‾ج مماسان للدائرة م عند ب ، ج

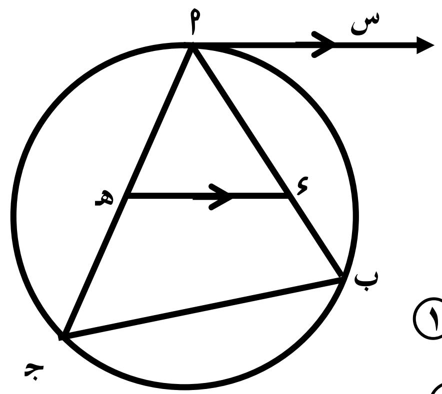
ق(∠ب ء ج) = ٧٠° أوجد بالبرهان ق(∠م)

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠م ج ب) = ق(∠ب ء ج) = ٧٠° مماسية و محيطية مرسومتان على نفس وتر التماس

∵ م‾ب ، م‾ج مماسان ⇐ م ب = م ج ⇐ ق(∠م ج ب) = ق(∠م ب ج) = ٧٠°

∴ ق(∠م) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°



② فى الشكل المقابل : م‾س مماس للدائرة عند م ، ء‾هـ // م‾س

أثبت أن الشكل ء ب ج هـ رباعى دائرى

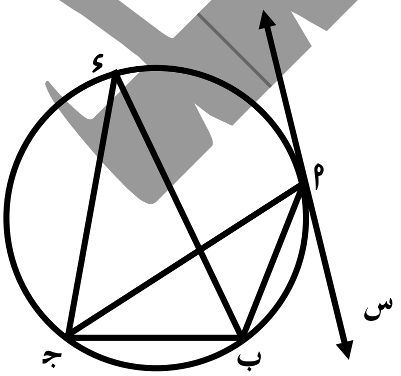
الحـــــــــــــل

∵ م‾س مماس ⇐ ق(∠ س م ب) = ق(∠ج) ①

∵ م‾س // ء‾هـ ⇐ ق(∠س م ب) = ق(∠م ء هـ) ②

من ① ، ② ⇐ ق(∠م ء هـ) = ق(∠ج) [خارجة تساوى المقابلة للمجاورة لها]

∴ الشكل ء ب ج هـ رباعى دائرى



③ فى الشكل المقابل : م‾س مماس ، ق(∠س م ب) = ٤٠°

، ق(∠م ب ج) = ١١٠° اوجد ق(∠ج ء ب)

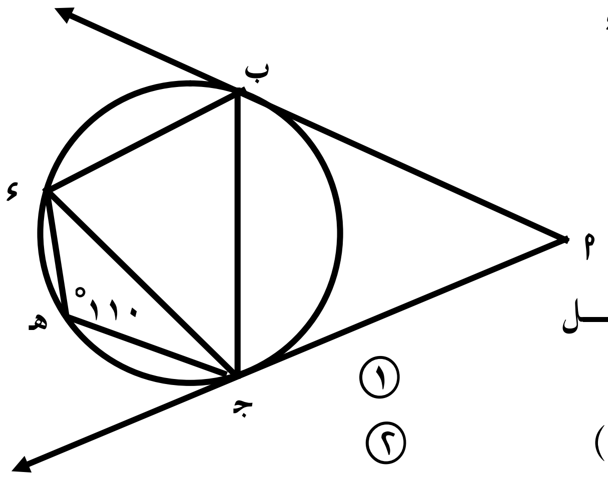
الحـــــــــــــل

∵ م‾س مماس ⇐ ق(∠م ج ب) = ق(∠س م ب) = ٤٠°

فى Δ م ب ج : ق(∠ب م ج) = ١٨٠ − (١١٠ + ٤٠) = ١٨٠ − ١٥٠ = ٣٠°

∴ ق(∠ج ء ب) = ق(∠ب م ج) = ٣٠° (محيطيتان تشتركان فى ⌒ب ج)

④ $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ج}}$ مماسان للدائرة عند ب ، ج ، ج ب = ج ء



أثبت أن : ق(∠م ب ج) = ق(∠ ء ب ج) و إذا كان

ق(∠ج ء هـ) = ١١٠° فأوجد ق(∠م)

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{م ب}}$ مماس ⇐ ق(∠م ب ج) = ق(∠ج ء ب) ①

∵ ج ب = ج ء ⇐ ق(∠ ء ب ج) = ق(∠ج ء ب) ②

من ① ، ② ⇐ ق(∠م ب ج) = ق(∠ ء ب ج) و هو المطلوب أولاً

∵ ق(∠ج هـ ء) = ١١٠° ، الشكل ب ج هـ ء رباعى دائرى

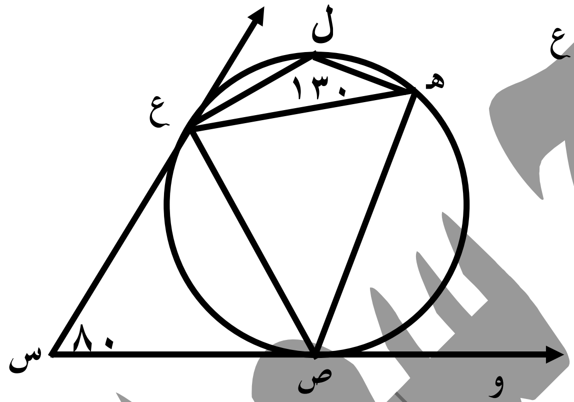
∴ ق(∠ج ب ء) = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

∵ $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ج}}$ مماسان ⇐ م ب = م ج ⇐ ق(∠م ب ج) = ق(∠م ج ب) = ٧٠°

فى Δ م ب ج : ق(∠م) = ١٨٠ – (٧٠ + ٧٠) = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠°

---

⑤ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ مماسان للدائرة عند ص ، ع



ق(∠ص س ع) = ٨٠° أثبت أن

$\boxed{١}$ ع هـ = ع ص $\boxed{٢}$ $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ص هـ}}$

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ مماسان

∴ ق(∠س ص ع) = ق(∠س ع ص) = $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

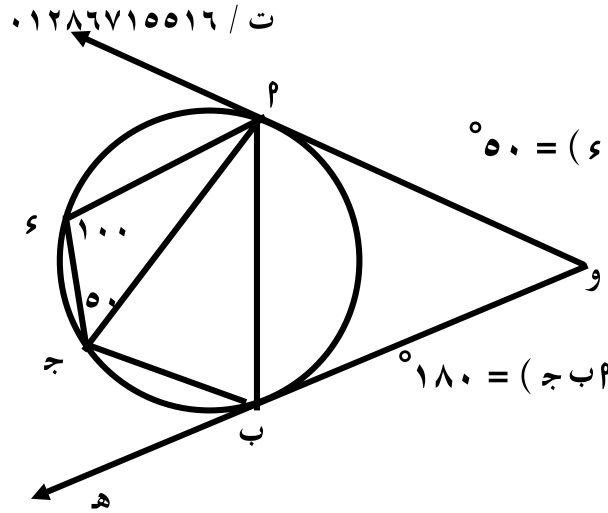
∵ ق(∠ص هـ ع) = ق(∠س ص ع) = ٥٠° مماسية و محيطية مرسومتان على نفس وتر التماس

∵ الشكل ل هـ ص ع رباعى دائرى ⇐ ق(∠ ل) + ق(∠هـ ص ع) = ١٨٠°

∴ ق(∠هـ ص ع) = ١٨٠ – ١٣٠ = ٥٠° ⇐ ق(∠هـ ص ع) = ق(∠هـ ص ع) ⇐ ع هـ = ع ص

∴ ق(∠س ع ص) = ق(∠هـ ص ع) = ٥٠° و هما متبادلتان

∴ $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ص هـ}}$



⑥ في الشكل المقابل : وأ ، وب يمسان الدائرة عند أ ، ب

أب // جـ ء ، ق(∠أ ء جـ) = ١٠٠° ، ق(∠أ جـ ء) = ٥٠°

أوجد : ق(∠جـ ب هـ) ، ق(∠أ و ب)

الحـــــــــــــل

∵ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري ⇐ ق(∠أ ء جـ) + ق(∠أ ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

في △ أ جـ ء : ق(∠ب أ ء) = ١٨٠ − (١٠٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٥٠ = ٣٠°

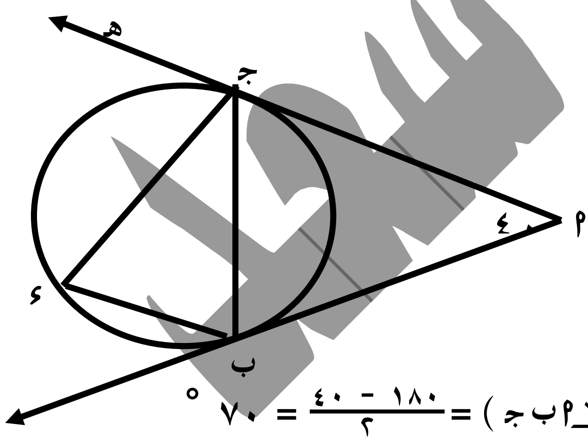
∵ أب // جـ ء ⇐ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠أ جـ ء) = ٥٠° لأنهما متبادلتان

∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠ب أ جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠أ ب و) = ١٨٠ − (٨٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠°

∵ : وأ ، وب يمسان الدائرة ⇐ وأ = وب ⇐ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ و ب أ) = ٥٠°

∴ ق(∠أ و ب) = ١٨٠ − (٥٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°



⑦ في الشكل المقابل : أب ، أجـ يمسان الدائرة عند ب ، جـ

أجـ // ب ء ، ق(∠أ) = ٤٠°

أوجد : ق(∠أ جـ ب) ، ق(∠ هـ جـ ء)

ثم أثبت أن : جـ ب = جـ ء

الحـــــــــــــل

∵ أب ، أجـ مماسان ⇐ أب = أجـ ⇐ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

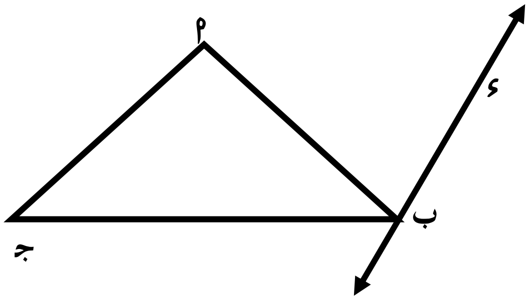
∵ أجـ // ب ء ⇐ ق(∠جـ ب ء) = ق(∠أ جـ ب) = ٧٠° بالتبادل

∵ ق(∠هـ جـ ء) = ق(∠جـ ب ء) = ٧٠° مماسية و محيطية مرسومتان على وتر التماس

في △ جـ ب ء : ق(∠جـ ب ء) = ق(∠جـ ء ب) = ٧٠° ⇐ جـ ب = جـ ء

عكس نظرية (٣ – ٣)

إذا رسم من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الاخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة



إذا كان : ق(∠أب ء) = ق(∠أ ج ب)

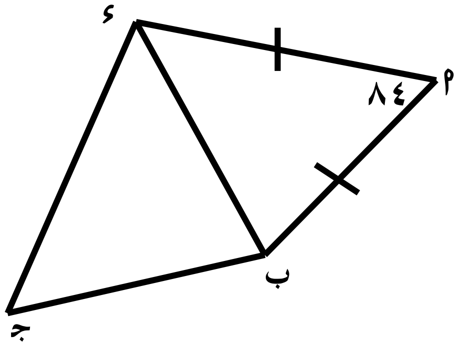
فإن ب ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أب ج من الخارج

أمثـــــلة

① فى الشكل المقابل : أب ج ء شكل رباعى فيه أب = أ ء

ق(∠أ) = ٨٤ °، ق(∠أب ج) = ١٣٢ °

أثبت أن : ب ج مماس لدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



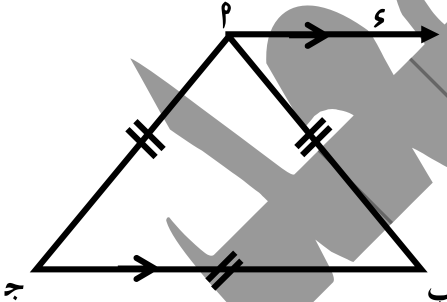
الحـــــــل

فى Δ أب ء : ∵ أب = أ ء

∴ ق(∠أب ء) = ق(∠أ ء ب) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢}$ = ٤٨ °

∵ ق(∠أب ج) = ١٣٢ ° ⇐ ق(∠ ء ب ج) = ١٣٢ – ٤٨ = ٨٤ °

∴ ق(∠ ء ب ج) = ق(∠أ) ⇐ ب ج مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أب ء



② فى الشكل المقابل : أب ج مثلث متساوى الأضلاع ، أ ء // ج ب

أثبت أن : أ ء مماساً للدائرة المارة برؤوس Δ أب ج

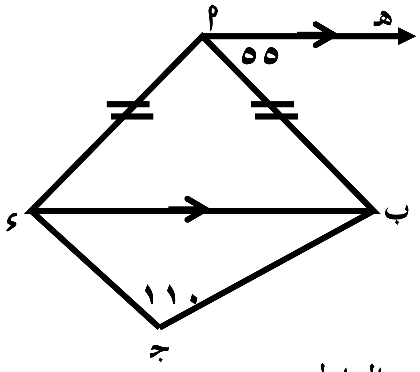
الحـــــــل

فى Δ أب ج : ∵ أب = ب ج = أ ج

∴ ق(∠ب أ ج) = ق(∠ب) = ق(∠ج) = ٦٠°

∵ أ ء // ج ب ⇐ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ب) = ٦٠° بالتبادل

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ج) ⇐ أ ء مماساً للدائرة المارة برؤوس Δ أب ج



③ فى الشكل المقابل : $\overline{أهـ}$ // $\overline{ءب}$ ، ق(∠ب أ هـ) = ٥٥°

ق(∠ج) = ١١٠° ، أب = أ ء

إثبت أن ① الشكل أب ج ء رباعى دائرى

② $\overline{أ هـ}$ مماساً للدائرة المارة برؤوس الشكل أب ج ء

الحـــــــــل

∵ $\overline{أ هـ}$ // $\overline{ءب}$ ⇐ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠أب ء) = ٥٥° بالتبادل

∵ أب = أ ء ⇐ ق(∠أب ء) = ق(∠أ ء ب) = ٥٥°

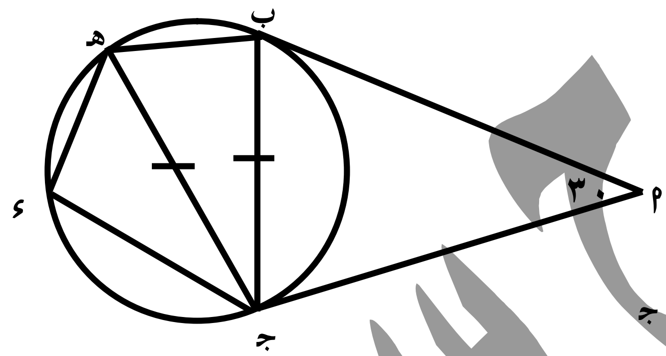
∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠ − (٥٥ + ٥٥) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

∵ ق(∠ب أ ء) + ق(∠ج) = ٧٠ + ١١٠ = ١٨٠°

∴ الشكل أب ج ء رباعى دائرى

∵ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠أ ء ب)

∴ $\overline{أ هـ}$ مماساً للدائرة المارة برؤوس الشكل أب ج ء



④ فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان

ق(∠أ) = ٣٠° ، ج ب = ج هـ

Ⓐ إثبت أن : $\overline{بهـ}$ // $\overline{أج}$

Ⓑ أوجد ق(∠ج ء هـ)

Ⓒ إثبت أن : $\overline{جهـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ج

الحـــــــــل

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان ⇐ أب = أج ⇐ ق(∠أب ج) = ق(∠أج ب) = $\frac{١٨٠ - ٣٠}{٢}$ = ٧٥°

∵ ق(∠بهـ ج) = ق(∠أب ج) = ٧٥° مماسية و محيطية مشتركتان فى القوس

∵ ج ب = ج هـ ⇐ ق(∠ج بهـ) = ق(∠ج هـ ب) = ٧٥°

∴ ق(∠هـ ب ج) = ق(∠أج ب) وهما فى وضع تبادل ⇐ $\overline{بهـ}$ // $\overline{أج}$

∵ الشكل ب ج ءهـ رباعى دائرى ⇐ ق(∠ج ب ء) + ق(∠ج ءهـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ج ءهـ) = ١٨٠ − ٧٥ = ١٠٥°

∴ ق(∠ج ءهـ) = ١٨٠ − (٧٥ + ٧٥) = ١٨٠ − ١٥٠ = ٣٠°

∵ ق(∠ب ج هـ) = ق(∠أ)

∴ $\overline{جهـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ج